

教师资格考试标准预测试卷
数学学科知识与教学能力（高级中学）
参考答案及解析（一）～（五）
(科目代码:404)

目 录

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(一) 参考答案及解析	(1)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(二) 参考答案及解析	(6)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(三) 参考答案及解析	(11)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(四) 参考答案及解析	(16)
教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)标准预测试卷(五) 参考答案及解析	(22)

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(一) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：因为 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6\lambda x_2x_3$ 是正定二次型，所以该二次型对应的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 3\lambda & 3 \end{bmatrix} \text{ 的各阶顺序主子式的行列式值都大于零，即有 } |1| > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 3\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$6 - 9\lambda^2 > 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{6}}{3} < \lambda < \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 故本题选 B.}$$

2. 【答案】A。解析：已知 $a \cdot b = 0, a \times c = 0$ ，所以 b 与 a 垂直， c 与 a 共线，又由于 a 是非零向量，所以 b 与 c 垂直，于是 $b \cdot c = 0$ 。故本题选 A。

3. 【答案】C。解析：已知 $P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = 1$ ，所以 $P(MN) = P(N)$ ，于是 $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(MN) = P(M)$ 。故本题选 C。

4. 【答案】C。解析：因为 $(\xi_3, 2\xi_2, \xi_1) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，所以基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 到基 $\xi_3, 2\xi_2, \xi_1$ 的过渡矩

$$\text{阵为 } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 从而 } \mathcal{A} \text{ 在基 } \xi_3, 2\xi_2, \xi_1 \text{ 下的矩阵为 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 故本题选 C.}$$

5. 【答案】B。解析：计算函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左右极限， $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x +$

$$1) \frac{x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{x^4} - 1 = a - 1. \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 存在，则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \text{ 即 } 1 = a - 1, \text{ 所以 } a = 2.$$

故本题选 B。

6. 【答案】D。解析：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) - b_n]$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛，所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛；当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。故本题选 D。

7. 【答案】A。解析：《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》在关于数学课程的性质中指出，高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程，具有基础性、选择性和发展性。

8. 【答案】A。解析：有限小数与无限不循环小数的关系是对立关系，因为它们满足下列三个条件：①属于同一个属概念，即小数；②外延之和小于属概念的外延，即存在既不是有限小数又不是无限不循环小数的小数；③外延没有重合的部分，即不存在既是有限小数又是无限不循环小数的小数。

二、简答题

9.【参考答案】

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} = - \left(x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

10.【参考答案】

$$\text{线性方程组} \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases} \text{, 对应的增广矩阵为 } \bar{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}, \text{对 } \bar{A} \text{ 作初等行变换化成阶梯形}$$

矩阵:

$$\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 1-a \end{bmatrix}.$$

当 $(2+a)(1-a) = 0$ 且 $1-a \neq 0$, 即 $a = -2$ 时, 线性方程组对应的系数矩阵的秩 $r(A) \neq r(\bar{A})$, 此时线性方程组无解;

当 $(2+a)(1-a) = 0$ 且 $1-a = 0$, 即 $a = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 此时线性方程组有无穷多解;

当 $(2+a)(1-a) \neq 0$, 即 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 此时线性方程组有唯一解。

11.【参考答案】

证明: 因为 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 即 $m \leq$

$$f(x) \leq M, \text{ 于是 } m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a), \text{ 整理得 } m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M. \text{ 由连续函数}$$

的介值定理可知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$, 即满足 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 。

12.【参考答案】

逻辑推理主要表现为: 掌握推理的基本形式和规则, 发现问题和提出命题, 探索和表述论证过程, 理解命题体系, 有逻辑地表达与交流。通过高中数学课程的学习, 学生能掌握逻辑推理的基本形式, 学会逻辑地思考问题; 能够在比较复杂的情境中把握事物之间的关联, 把握事物发展的脉络; 形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神, 增强交流能力。

13.【参考答案】

(1) 依据高中数学课程理念, 实现“人人都能获得良好的数学教育, 不同的人数学上得到不同的发展”, 促进学生数学学科核心素养的形成和发展。

(2) 依据高中课程方案, 借鉴国际经验, 体现课程改革成果, 调整课程结构, 改进学业质量评价。

(3) 依据高中数学课程性质, 体现课程的基础性、选择性和发展性, 为全体学生提供共同基础, 为满足学生的不同志趣和发展提供丰富多样的课程。

(4) 依据数学学科特点, 关注数学逻辑体系、内容主线、知识之间的关联, 重视数学实践和数学文化。

三、解答题

14.【参考答案】

由题意, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 M 属于特征值 3 的一个特征向量, 所以 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 即 $\begin{bmatrix} a+2 \\ c+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, 于是 $a = 1, c = 2$, 从而 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。对矩阵 (M, E) 作初等行变换, 将左侧矩阵化成单位矩阵:

$$(M, E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] = (E, M^{-1}).$$

因此, 矩阵 M 的逆矩阵 $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

学生是数学学习的主体, 在积极参与学习活动的过程中不断得到发展, 学生获得知识必须建立在自己思考的基础上, 只有亲身参与教师精心设计的教学活动, 才能在数学思考、问题解决和情感态度方面得到发展。

教师应成为学生学习活动的组织者、引导者、合作者, 为学生的发展提供良好的环境和条件。教师不仅要根据学生的实际情况和教学目标设计出好的教学方案, 还要采用适当的教学方式, 营造师生互动、生生互动、生动活泼的课堂氛围。教师要引导学生通过实践、思考、探索、交流获得知识、形成技能以及发展思维等。在教学的过程中, 教师应以平等、尊重的态度鼓励学生积极参与教学活动, 启发学生共同探索。

在教学过程中, 既要重视教师教, 更要重视学生学, 好的教学活动是学生的主体地位和教师的主导作用的和谐统一。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 该学生忽略了空集是任何集合的子集。可能造成这种错误的原因有以下几点:

- ① 该学生对集合的性质掌握不够透彻;
- ② 该学生对分类讨论思想的运用不够熟练;
- ③ 该学生没有注意空集是任何集合的子集这一重要性质。

正确解法如下:

集合 $A = \{-2, 3\}$, 由 $A \cap B = B$ 知 $B \subseteq A$, 当 $B = \emptyset$ 时, 即方程 $2ax + 1 = 0$ 无解, 此时 $a = 0$; 当 $B \neq \emptyset$ 时, 即方程 $2ax + 1 = 0$ 的解为 -2 或 3 时, 代入得 $a = -\frac{1}{4}$ 或 $a = -\frac{1}{6}$ 。所以符合条件的 a 有 3 个。

(2) 针对本题, 结合案例中学生出现的错误, 教师应该根据该题的教学步骤, 在教学过程中, 采取相应的策略设置问题。下面结合教学过程进行分析:

- ① 教师与学生一起回忆旧知, 提出问题“集合的相关性质有哪些”。
- ② 教师通过提问引导学生复习空集及其性质。
- ③ 教师结合本题引导学生根据集合的性质, 运用分类讨论思想解题, 将集合 B 是空集的情况优先进行讨论。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学目标

- ① 了解互为反函数的两个函数图像间的关系, 理解互为反函数的两个函数图像关于 $y = x$ 对称的原理;
- ② 在探究互为反函数的两个函数图像间的关系的过程中增强发现和提出问题的能力, 分析和解决问题的能力, 增强通过探究活动学习数学知识的经验;

③ 通过探究活动感悟数与形的转化, 体会数形结合的思想, 感受数学的对称之美。

(2) 教学重点: 通过探究活动使学生知道互为反函数的两个函数图像之间的关系。

(3) 教学过程

一、活动探究

探究一：互为反函数的两个函数的定义域和值域的关系。

问题1：你能写出两个互为反函数的函数吗？

问题2：指数函数 $y = 2^x$ 和对数函数 $y = \log_2 x$ 互为反函数，它们的定义域和值域分别是什么？它们的定义域和值域有怎样的关系？

学生活动：先小组交流自己的答案，然后学生汇总结论向教师汇报。

学生汇报结果后，教师小结：指数函数 $y = 2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，值域为 $(0, +\infty)$ ，对数函数 $y = \log_2 x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，值域为 $\mathbf{R}$ 。由此可以看出，指数函数 $y = 2^x$ 的定义域和值域分别是对数函数 $y = \log_2 x$ 的值域和定义域。

探究二：指数函数 $y = 2^x$ 与对数函数 $y = \log_2 x$ 图像间的关系。

问题1：你能在一个坐标系内同时画出函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图像吗？

学生活动：学生在自己准备的白纸上尝试画出函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图像。

问题2：你是怎样作图的？你画出的图像和老师的一样吗？（课件出示正确图像）

学生活动：学生小组内交流自己的画图方法，相互评价优缺点，教师告知学生自己的画图方法，让学生与自己的画图法比较、分析。

问题3：取 $y = 2^x$ 图像上的几个点，如 $P_1(-1, \frac{1}{2})$, $P_2(0, 1)$, $P_3(1, 2)$ 。 P_1, P_2, P_3 关于直线 $y = x$ 的对称点的坐标是什么？它们在 $y = \log_2 x$ 的图像上吗？

学生活动：学生先口头回答对称点的坐标是什么，然后在图上找出 P_1, P_2, P_3 关于直线 $y = x$ 的对称点 P'_1, P'_2, P'_3 。

教师总结：通过画图作点，能够发现， P_1, P_2, P_3 关于 $y = x$ 的对称点 $P'_1(\frac{1}{2}, -1)$, $P'_2(1, 0)$, $P'_3(2, 1)$ 在 $y = \log_2 x$ 的图像上。

问题4：如果点 $P_0(x_0, y_0)$ 在函数 $y = 2^x$ 的图像上，那么 P_0 关于直线 $y = x$ 的对称点是什么？它在函数 $y = \log_2 x$ 的图像上吗？为什么？

学生活动：教师引导学生根据解答问题3时使用的方法来分析思考问题4的解答，各小组合作完成对问题4的解答，并汇报所得结论。

教师对学生的回答进行点评，教师订正：利用对称性可知，点 $P_0(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点坐标为 $P'_0(y_0, x_0)$ ，因为当 $y_0 = 2^{x_0}$ 时， $x_0 = \log_2 y_0$ ，即点 $P'_0(y_0, x_0)$ 在函数 $y = \log_2 x$ 的图像上。

问题5：根据上述探究过程，你可以推出什么结论？

学生活动：让学生分组合作，讨论交流，最后进行分组汇报。

教师对各组同学得出来的结论进行点评，引导同学们得出结论：① 函数 $y = 2^x$ 图像上的点关于直线 $y = x$ 的对称点在函数 $y = \log_2 x$ 的图像上；② 函数 $y = 2^x$ 的图像与函数 $y = \log_2 x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称。

探究三：互为反函数的两个函数图像之间的关系。

问题1：上述结论对于指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 及对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像也成立吗？为什么？

学生活动：学生自主猜想，并小组内讨论可行的验证方法来验证猜想。

教师引导学生进行合理的猜想，引导如下：设 $P_0(x_0, y_0)$ 在函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 上，由对称性可知， $P_0(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点坐标为 $P'_0(y_0, x_0)$ ，由 $y_0 = a^{x_0}$ ，则有 $x_0 = \log_a y_0$ ，即点 $P'_0(y_0, x_0)$ 在函数 $y = \log_a x$ 的图像上，所以两图像关于直线 $y = x$ 对称。

问题2：问题1得出的结论具有一般性吗？其他函数及其反函数的图像也有这种关系吗？

学生活动：可以让学生再观察几对函数及其反函数的图像，体会从特殊到一般的推理过程。

教师小结：函数及其反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称，这是由反函数的定义决定的，函数图像上的每一个点关于直线 $y = x$ 的对称点都在其反函数图像上，所以它们的图像关于直线 $y = x$ 对称。

二、习题巩固

教师出示习题，让学生当堂完成。

习题：写出下列函数的反函数并画出它们的图像，观察两个图像之间的关系。

$$1. y = \sqrt{x} - 1 \quad (x \geq 1)$$

$$2. y = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

三、反思总结

这节课学习了什么知识？有什么疑问？请学生课后讨论一下。

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(二) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D. 解析: 已知 A, B 互不相容, 所以 $P(AB) = 0$. A 项, $P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$, 因为 $P(A \cup B)$ 不一定为 1, 所以 A 项错误; B 项, 当 $P(A), P(B)$ 不为 0 时, 该式不成立, B 项错误; C 项, 只有当 A, B 互为对立事件时等式成立, C 项错误; D 项, $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(AB) = 1$, D 项正确. 故本题选 D.

2. 【答案】D. 解析: 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $x \ln x$, 则 $f(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$, 从而 $f'(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$. 故本题选 D.

3. 【答案】D. 解析: 由题意, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, 结合等价无穷小 $\ln(1+x^2) \sim x^2$ 可得 $f[\ln(1+x^2) + 1] = f(1) + f'(1)\ln(1+x^2) + o(\ln(1+x^2)) = x^2 + o(x^2)$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\ln(1+x^2) + 1]}{(\sqrt{1+x} - 1) \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2} x \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2}} = 2$. 故本题选 D.

4. 【答案】A. 解析: 因为 $f(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$, 所以矩阵 A 的特征值为 1, 2, -3, 于是 $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6$. 故本题选 A.

5. 【答案】D. 解析: 由题意可得, $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2), \overrightarrow{AC} = (1, 2, 4)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -6, 2)$, 于是 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. 故本题选 D.

6. 【答案】C. 解析: 题中非齐次线性方程组对应的增广矩阵为 $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & -4 & 2 \end{bmatrix}$, 对 $\overline{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵得, $\overline{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 4 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$. 显然, 若方程组有无穷多解, 则有 $2\lambda - 4 = 2 - \lambda = 0, \lambda = 2$. 故本题选 C.

7. 【答案】A. 解析: 对于任意两个有理数 a, b (设 $a < b$), 总能找到介于 a, b 之间的有理数, 如 $\frac{a+b}{2}$, 所以有理数系具有稠密性, B 项说法正确; C 项是有理数的定义, 说法正确; 任意两个有理数的商 (除数不为 0) 仍然是有理数, 即有理数的除法 (除数不为 0) 具有封闭性, D 项说法正确. A 项说法错误, 因为在有理数系内存在不收敛的柯西数列, 例如, 取 $\sqrt{2}$ 近似到小数点后第 n 位的近似数组成一个数列, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ..., 则这个数列是柯西数列, 且每一项都是有理数, 但其在有理数系内不存在极限 (在实数系内存在极限 $\sqrt{2}$).

8. 【答案】A. 解析: 《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指出, 高中数学学习评价关注学生知识技能的掌握, 更关注数学学科核心素养的形成和发展, 制定科学合理的学业质量要求, 促进学生在不同学习阶段数学学科核心素养水平的达成.

二、简答题

9. 【参考答案】

记点 (x, y) 经矩阵 A 对应的变换作用后的坐标为 (x', y') , 则 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 即 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - y, \end{cases}$ 将

(x', y') 代入直线 l_1 的方程, 整理得 $\left(\frac{2}{b} - 1\right)y = -\left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{b}$ 。由于 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, 所以

$\left(\frac{2}{b} - 1\right)y = -\left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{b}$ 就是直线 l 的方程。显然 $\frac{2}{b} - 1$ 不能等于 0, 所以直线方程可化为 $y =$

$$-\left(\frac{b+1}{2-b}\right)x + \frac{1}{2-b}, \text{ 从而 } \begin{cases} \frac{b+1}{2-b} = a, \\ \frac{1}{2-b} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

10.【参考答案】

过直线 l 的平面束方程为 $\lambda(2x - 4y + z - 1) + \mu(x + 3y + 5z) = 0$, 整理得, $(2\lambda + \mu)x + (-4\lambda + 3\mu)y + (\lambda + 5\mu)z - \lambda = 0$ (λ, μ 不全为 0)。因为所求平面与 z 轴平行, 所以 $\begin{cases} \lambda + 5\mu = 0, \\ \lambda \neq 0, \end{cases}$ 于是 $\lambda = -5\mu \neq 0$, 代入平面

束方程化简得, 所求平面方程为 $9x - 23y - 5 = 0$ 。

11.【参考答案】

若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 只需令 $x_0 = a$ 或 b 即可, 下面假设 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$ 。

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。由于 $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, 且 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$, 所以 $F(a) = f(a) - a > 0, F(b) = f(b) - b < 0$, 于是由零点存在定理可知, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$ 。

12.【参考答案】

为了实现评价目的, 教师应坚持以学生发展为本, 以积极的态度促进学生不断发展, 日常评价应遵循以下原则:

(1) 重视学生数学学科核心素养的达成。基于数学学科核心素养的教学要创设合适的教学情境、提出合适的数学问题。在设计教学评价工具时, 应着重对设计的教学情境、提出的问题进行评价。

(2) 重视评价的整体性与阶段性。基于学业质量标准 and 内容要求制定必修、选择性必修和选修课程的评价目标, 关注评价的整体性。基于内容主线应当把教学评价的总目标合理分解到日常教学评价的各个阶段, 关注评价的阶段性。

(3) 重视过程评价。日常评价不仅要关注学生当前的数学学科核心素养水平, 更要关注学生成长和发展的过程; 不仅要关注学生的学习结果, 更要关注学生在学习过程中的发展和变化。

(4) 关注学生的学习态度。良好的学习态度是学生形成和发展数学学科核心素养的必要条件, 也是最终形成科学精神的必要条件。在日常评价中应把学生的学习态度作为教学评价的主要目标。

13.【参考答案】

双曲线定义: 平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫作双曲线。它的定义方式是发生式定义法。

等差数列定义: 如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 那么这个数列就叫作等差数列, 这个常数叫作等差数列的公差, 公差通常用字母 d 表示。它的定义方式是描述性定义法。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 直线与 x 轴相交等价于存在 x 轴上唯一点 $(x_0, 0, 0)$ 满足直线方程, 等价于方程组 $\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + D_2 = 0 \end{cases}$ 有

唯一解, 等价于 A_1, A_2 不全为 0, 且 $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = A_1D_2 - A_2D_1 \neq 0$ 。

(2) 直线与 x 轴重合等价于 x 轴上任意一点 $(x, 0, 0)$ 都满足直线方程, 等价于方程组 $\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ A_2x + D_2 = 0 \end{cases}$ 有无

穷多解,等价于 $A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = 0$ 。

(3) 直线与 x 轴平行等价于存在不全为 0 的 $\Delta D_1, \Delta D_2$ 使得直线
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \Delta D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 + \Delta D_2 = 0 \end{cases}$$
 与 x 轴重合(这里直线方程中的两个平面分别与原直线方程中的两个平面重合或平行),由(2)知这等价于 $A_1 = A_2 = D_1 + \Delta D_1 = D_2 + \Delta D_2 = 0$,再结合 $\Delta D_1, \Delta D_2$ 不全为 0 得, $A_1 = A_2 = 0$,且 D_1, D_2 不全为 0。

四、论述题

15.【参考答案】

数学教育评价是全面收集和处理数学课程教育学的设计、实施过程中的信息,从而做出价值判断、改进教育决策的过程。

数学教育评价的作用主要体现在以下几个方面:

(1) 管理作用。数学教育评价以国家数学课程标准为基准,评价的目的是实现国家数学课程标准的各项要求,达到教育目标。只有科学的数学教育评价,才能有效地对数学教育过程进行科学的管理。

(2) 导向作用。不同的教育价值观有不同的评价标准,不同的评价标准,对数学实践起着不同的导向作用。被评价者把教育评价所依据的价值标准作为自己的价值标准,把教育评价所依据的目标作为自己努力达到的目标。

(3) 调控作用。所谓调控作用是指调节与控制教学的作用。在数学教育评价的过程中,要收集大量的教育信息,并通过信息反馈,调节教学,控制教学,使之尽快地达到目标要求,这样可以成功地获得教育或教学的理想效果。

(4) 激发作用。通过数学教育评价,可以帮助教师及时获得大量的信息,使其认识到自己的成就和不足,进一步发现成功与失败的原因,了解个人自身教与学存在的差距,从而达到激励先进,鞭策后进的目的。通过反馈信息的调节与控制可以激发学生学习数学的积极性,培养学生的数学意识,使学生热爱数学,获得最佳的学习效果。

(5) 诊断作用。数学教育评价的诊断功能是由教育评价自身决定的,通过教育上的诊断,可以为改进和提高下一阶段的学习提供依据,及时了解存在问题的症结和弊端,以便有针对性地改变策略和方法,促进学生的发展。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 设置“思考”的主要目的是引导学生将初中学习过的从一次函数看一元一次方程和一元一次不等式的思想运用到新内容中,利用新旧知识间的逻辑联系,淡化学生对新知识的陌生感,有效降低学生对新知识的认知难度,克服对新知的畏难心理。让学生带着自己的想法、思路和问题解决下面的具体例子,可以启发学生的思维,加深对新知的记忆。

(2) 二次函数在高中阶段的数学课程中具有十分重要的地位,是整个高中数学课程内容的基础。它有着丰富的内涵和外延,作为一个最基本的初等函数,我们可以通过它来研究函数的图像和性质,可以建立起函数、方程、不等式之间的联系,从而培养学生的数学思维能力,提高数学能力和专业素养。函数的思想、方法贯穿于整个高中数学的教与学,其中,二次函数有着基础性的地位和作用,任何时候都不可轻视。

二次函数作为高中数学中基础且重要的内容,在高中数学课程中具有以下几点作用:

① 初中阶段已经讲述了函数的定义,进入高中后在学习集合的基础上又学习了映射,接着重新学习函数概念,主要用映射观点来阐明函数,这时就可以用学生已经有一定了解的函数,特别是以二次函数为例来加深对函数概念的认识,从而使学生对函数的概念有一个较明确的认识。

② 利用二次函数的性质和图像可以解决非基本函数、不等式的相关问题,充分利用二次函数的图像与性质可以更好地解决二次不等式的有关问题,既培养了数形结合的思想,又有利于分类讨论思想的形成,充分体现了二次函数的基础性地位;

③ 通过对二次函数的灵活应用,可以深入培养学生的数学思维,提高学生的数学能力和专业素养,为后续数学内容的学习开启新的体验。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)① 等差数列是高三年级所学习的必修 5 中的内容,此阶段的学生已经学习了函数的概念、性质和应用,对函数、方程思想的体会逐渐深刻,已经熟悉了由观察到抽象的数学教学过程,学生也学习了数列的概念与简单表示方法、通项公式、递推公式等概念。

此阶段学生的智力发展已经到了形式运算阶段,具备了较强的抽象思维能力和演绎推理能力;具备了一定的数学表达能力、数学分析能力和数据处理能力;具备学习等差数列所需的知识,但是在对一些等差数列的通项公式的求解过程中,学生尚欠缺基本的分析能力及处理经验。所以在教学过程中,教师要注重从具体生活实例出发,注重引导、启发以符合学生的心理发展特点,从而促进其思维能力进一步发展。

② 引入环节

教师出示几个不同的数列:

1. 0, 5, 10, 15, 20, 25;

2. -2, -1, 0, 1, 2, 3;

3. 3, 3, 3, 3, 3, 3;

4. $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, 1$;

问题:请学生仔细观察以上数列,各个数列相邻两项之间有什么共同特征?

教师引导学生通过观察、类比、思考和交流得出结论。共同特征:从第二项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数。

教师根据学生给出的结论,为存在这种共同特征的数列起一个名字:等差数列。然后引出等差数列的定义。

【设计意图】给出几个不同的等差数列,让学生通过探索交流发现规律,从而提升学生分析问题的能力。

(2)① 习题:已知等差数列 8, 5, 2, ...,

(1) 请写出通项公式;

(2) 请求出第 20 项的值;

(3) -16 是这个数列中的第几项?

【设计意图】第一问目的是加深学生对等差数列中公差、通项公式的记忆,第二问是帮助学生理解通项公式的运用,第三问是公式的逆用,帮助学生进一步巩固等差数列的基础知识。

② 教学片段

教师给出等差数列的定义,根据定义要求学生写出其中蕴含的递推公式,即 $a_n - a_{n-1} = d$ 。

问题:能否根据等差数列定义得到的递推公式,推出数列的通项公式呢?

教师启发,引导学生可用首项和公差表示数列中的任意一项,学生分组探究,归纳总结通项公式。

预设: $a_2 = a_1 + d$,

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$,

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$,

.....

猜想出: $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$ 。

问题:那么我们要如何证明此猜想成立呢?

教师启发引导学生根据递推公式 $a_n - a_{n-1} = d$ 写出若干项,然后把等式左右两边都相加,得到递推公式,

并介绍证明通项公式的方法为叠加法,即

$a_2 - a_1 = d$,

$a_3 - a_2 = d$,

$a_4 - a_3 = d$,

.....

$$a_{n-1} - a_{n-2} = d,$$

$$a_n - a_{n-1} = d,$$

两边叠加得到 $a_n - a_1 = (n-1)d$, 推出等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 当 $n = 1$ 时, 通项公式也成立。

【设计意图】学生在引导下经由猜想归纳总结出等差数列的通项公式, 学生的推理能力因此得到有效的锻炼。学生分组合作、自主探究可以培养学生解决问题的能力, 增强其合作交流的意识。

公众号：编途指南

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(三) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】C。解析：罗尔定理的条件是，函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续，在区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$ 。A项不满足 $f(1) = f(-1)$ ；B, D两项不满足在区间 $[-1, 1]$ 内连续；C项满足条件。故本题选C。

2. 【答案】A。解析：对以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量组的矩阵 A 进行初等行变换化成阶梯形矩阵： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。由此可知， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组。故本题选A。

3. 【答案】A。解析：二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。因为矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5), \text{所以矩阵 } A \text{ 的特征值为 } -1(\text{二重}), 5, \text{于是矩阵}$$

A 的正惯性指数为1,负惯性指数为2。因此,二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范型是 $-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ 。故本题选A。

4. 【答案】A。解析：由题意可知,向量 $m = (1, 2, 3)$ 是直线 l' 的方向向量;向量 $n = (2, 3, 4)$ 是平面 π 的法向量。因为直线 l 与直线 l' 垂直,与平面 π 平行,所以直线 l 的方向向量与向量 m, n 都垂直,于是向量 $m \times n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1, 2, -1)$ 就是直线 l 的方向向量,再结合直线 l 经过原点可得,直线 l 的方程为 $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$,也即 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ 。故本题选A。

5. 【答案】C。解析：根据规范性， $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = Ce = 1$,所以 $C = e^{-1}$ 。故本题选C。

6. 【答案】C。解析：因为函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ 是初等函数,且仅在 $x = 0$ 处无意义,所以 $f(x)$ 仅有一个间断点 $x = 0$,又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$,所以 $x = 0$ 是第二类间断点。故本题选C。

7. 【答案】B。解析：1673年,莱布尼茨首次使用“function”(函数)表示“幂”,而后他用该词表示曲线上的横坐标、纵坐标、切线长等曲线上的有关几何量。

8. 【答案】A。解析：《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中在解释“数学抽象”这一核心素养时指出,数学抽象是数学的基本思想,是形成理性思维的重要基础,反映了数学的本质特征,贯穿在数学产生、发展、应用的过程中。

二、简答题

9. 【参考答案】

由于 a 是 $P(x) = 0$ 的 r 重根,所以存在多项式 $g(x)$,使得 $P(x) = (x - a)^r g(x)$,这里 $g(x)$ 不能被 $x - a$ 整除,于是 $P'(x) = r(x - a)^{r-1}g(x) + (x - a)^r g'(x) = (x - a)^{r-1}[rg(x) + (x - a)g'(x)]$ 。由于 $g(x)$ 不能整除 $x - a$,所以 $g(a) \neq 0$,于是 $[rg(x) + (x - a)g'(x)]|_{x=a} = rg(a) \neq 0$,进而可知, $[rg(x) + (x - a)g'(x)]$ 不能被 $x - a$ 整除。因此, a 是 $P'(x) = 0$ 的 $r - 1$ 重根。

10.【参考答案】

已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 c dx = 2c = 1$, 于是 $c = \frac{1}{2}$, 从而 X 的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{(x+1)}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

11.【参考答案】

因为 $f(x) = x^n$, 所以 $f'(x) = nx^{n-1}$, 从而曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = n(x-1) + 1$. 令 $y = 0$, 解得 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

12.【参考答案】

数据分析的主要过程包括: 收集数据, 整理数据, 提取信息, 构建模型, 进行推断, 获得结论. 具体分析如下:

(1) 收集数据, 整理数据. 首先要选择合理的收集数据的方法, 获得有价值的原始数据, 通过制作图、表等方式, 对数据进行整理, 以便探索数据中隐藏的信息.

(2) 提取信息, 构建模型. 通过用各种形式的方程对数据进行拟合, 提取数据中的有用信息, 再进一步的进行分析, 选取合理的数学模型, 使用统计方法对数据进行深入分析.

(3) 进行推断, 获得结论. 对于建立模型分析取得的结果进行检验, 检验其可靠性和精确度并做出判断, 最后得出结论.

13.【参考答案】

由两个大前提推出一个结论的思维形式称为三段论推理. 大前提是指一般性事物, 小前提是指有一般性事物特征的特殊事物, 它是反映个别对象与大前提有关系的判断, 结论是由两个前提推出的判断. 可表示为: 大前提, M 是 P ; 小前提, S 是 M ; 结论, S 是 P .

用集合知识说明解释: 若集合 M 的所有元素都具有性质 P , S 是 M 的一个子集, 那么 S 中的所有元素也具有性质 P .

三、解答题

14.【参考答案】

证明: 由题意, 放手后直线 l 落在函数 $f(x)$ 的图像上并支撑在点 $(\zeta, f(\zeta))$, 所以对 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x \leq 0$, 且当 $x = \zeta$ 时等号成立 (函数 $f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x$ 在 $x = \zeta$ 处取得最大值 0), 又 $0 < a < b$, 所以不等式两边同除 x 并移项得, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\zeta)}{\zeta}$. 因此, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $x = \zeta$ 处取得最大值.

引入辅助函数 $G(x) = f(x) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}x$. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 所以 $G(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 又根据前面的分析知, 函数 $G(x)$ 在内点 $x = \zeta$ 处取得最大值 0, 所以 $x = \zeta$ 是函数 $G(x)$ 的极大值点, 于是由费马定理知, $G'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\zeta} = 0$, 即有 $f'(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta}$.

四、论述题

15.【参考答案】

常用的导入环节的类型主要有以下几种:

(1) 温故导入

温故导入主要是利用新旧知识间的逻辑联系, 找出新旧知识联结的交点, 由旧知识的复习迁移到新知识的学习上来. 此种方法常用于数学概念和命题教学. 例如, 讲二倍角公式的时候, 可以先复习两角和的正弦

和余弦,从而得到二倍角的正弦、余弦公式。

(2) 实例导入

实例导入是选取与所授内容有关的生活实例或学生已有的生活经验,通过对其分析、引申、演绎、归纳出从特殊到一般、从具体到抽象的规律来导入新课。当新授内容与学生有关生活经验既有联系又有区别时,通常适宜采用此种导入方法。例如,在对数概念的导入教学中,可以从研究学生身边的一些增长率问题为出发点。

(3) 情境导入

情境导入就是通过多媒体辅助教学手段,创设出能够激发学生的想象力或引发学生相应情感体验的情境,以激发学生的兴趣,诱发思维,使学生在欣赏或情绪渲染中就势转入新内容学习的一种导入方式。在数学中,几何图形相关概念、定理公理、数学应用题等教学情境可以采用此种导入方法。例如,在讲解平行四边形的相关定理时可以采用此种导入方法。

(4) 类比导入

类比导入就是当两个对象都有某些相同或类似属性,而且已经了解其中一个对象的某些性质时,推测另一个对象也有相同或类似性质的思维形式。例如,在学习分式时,可以通过分数类比学习。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 教师甲采用实例导入法,结合生活实例使学生较容易地接受新知,加深学生对新知的理解,感受新知在生活实际中的应用,使学生深切感受到生活中处处有数学。

教师乙采用悬念导入法,激发学生的好奇心和求知欲,既巧妙地提出了学习任务,又创造出探求知识的教学情景,让学生的思维和教师的讲课交融在一起,使师生之间产生共振。

教师丙采用了直接导入法,开门见山地导入课题,直接给出本节课的教学目标,以引起学生的有意注意,使其直接进入学习状态,迅速找准定位,把握这节课的基本轮廓,提高学生的学习效率和质量。

(2) 课题引入是在课堂教学活动开始时的教学行为方式,是教学活动的重要环节,精彩的引入可以激发学生的求知欲,产生学习动机,明确学习方向,为整节课的教学打下良好的基础。课题引入在新课教学中是非常重要的,教师在教学活动中可以采用多种多样的方法来进行课题引入,从而促进学生的认知活动与情感态度的有机结合,让学生全身心地投入到学习中。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 实例:某车主2012年在4S店购买某品牌轿车,该轿车当时的售价为36万元,年折旧率约为10%(就是说这辆车每年减少它的价值的10%),那么,到2019年该车的价值是多少?到2030年呢?

【设计意图】结合生活中的实例,让学生感受数学与现实生活的联系,感受数学在生活中的广泛应用,让学生体会到“数学源于生活,并应用于生活”,增加学生学好数学的信心。

(2) 教学目标

① 通过实例抽象出等比数列模型,经历由发现几个具体数列的等比关系归纳出等比数列的定义的过程,理解等比数列的概念;

② 通过与等差数列的通项公式的推导作类比,探索等比数列的通项公式,培养观察、分析、归纳和逻辑推理的能力;

③ 能运用等比数列的概念及通项公式解决一些实际问题,培养严密的思维习惯及实事求是的科学态度,增强学好数学的信心。

(3) 教学过程

一、创设情境

教师出示以下实例:

1. 人体中的某种细胞经过细胞分裂可以由一个细胞分裂成两个细胞,两个细胞分裂成四个细胞,四个细

胞分裂成八个细胞,……

2. 我国古代数学家提出:“一尺之锤,日取其半,万世不竭。”

3. 银行有一种支付利息的方式叫作“复利”,也就是“利滚利”,其计算本利和的公式是“本利和 = 本金 $\times$ $(1 + \text{利率})^{\text{存期}}$ ”。现存入银行1万元,年利率是1.98%,那么按照复利,5年内各年末得到的本利和分别是多少?

问题:请同学写出上述3个实例中所含有的数列。

学生给出结果,教师板书:

1. 细胞分裂个数所组成的数列:1,2,4,8,...

2. 把“一尺之锤”看成单位“1”,得到数列: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

3. 各年末本利和所组成的数列: $10\,000 \times (1 + 0.0198), 10\,000 \times (1 + 0.0198)^2, 10\,000 \times (1 + 0.0198)^3, 10\,000 \times (1 + 0.0198)^4, 10\,000 \times (1 + 0.0198)^5$ 。

问题:回忆等差数列的概念,观察上面所写出的数列,他们有什么共同点?

教师引导学生通过观察、类比、思考和交流,得出结论。共同特征:从第二项起,每一项与它的前一项的比等于同一个常数。

【设计意图】通过写出生活实例中的数列,使学生感受等比数列的现实生活意义,理解等比数列的结构性质;对等差数列的回忆,引导学生类比等差关系和等差数列的概念,发现等比关系。

二、新课讲授

教师引导学生依照等差数列的定义,尝试总结出等比数列的定义。

教师总结等比数列的定义:一般地,如果一个数列,从第二项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列就叫作等比数列。这个常数叫作等比数列的公比,用字母 q 表示。

教师出示下列数列,让学生判断是否为等比数列,若是,找出公比;若不是,说明理由。

数列:1,3,9,27,...

$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

1, -2, 4, -8, ...

-1, -1, -1, -1, ...

1, 0, 1, 0, ...

问题:① 公比 q 能为0吗?为什么?首项能为0吗?

② 公比 q 能为1吗?为什么?是什么数列?

学生交流讨论,教师指导总结。

问题:根据等比数列的定义能发现怎样的递推公式?

教师根据等差数列的递推公式,引导学生得出: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 。

问题:我们已经学过了等差数列的通项公式,请同学们尝试根据递推公式写出等比数列的通项公式。

教师巡视,并让学生小组交流讨论,引导学生由叠加法联想到叠乘法,使等式左、右两边都相乘消去其余项得到通项公式,即

$$\text{叠乘法: } \frac{a_2}{a_1} = q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q,$$

...

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q,$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

两边叠乘得到： $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$ ，所以等比数列的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ ，当 $n = 1$ 时，通项公式也成立。

问题：设 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 是等比数列，则 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 之间有怎样的关系？

教师引导学生利用等比数列的通项公式来推导出 $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ 。然后给出等比中项的定义。

【设计意图】让学生类比等差数列通项公式的推导过程，推导出等比数列的通项公式，强化学生自主学习和归纳推理的能力，向其渗透类比的数学思想；通过对等比中项公式的推导，加深学生对通项公式的理解，进而获得对等比数列相关性质的了解。

公众号：编途指南

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(四) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析：根据平面 π 的方程可知，向量 $(1, 2, -1)$ 是平面 π 的法向量，于是过点 A 且垂直于平面 π 的直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 1 - t, \end{cases}$ 将直线的参数方程代入平面方程得， $(4+t) + 2(-3+2t) - (1-t) - 3 = 0$ ，解得 $t = 1$ 。因此，点 $A(4, -3, 1)$ 在平面 π 上的投影为 $(4+1, -3+2, 1-1) = (5, -1, 0)$ 。故本题选 A。

2. 【答案】B。解析：若 β 可以由向量组线性表出，则线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 有解。对线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 的增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵： $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & t \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 5 & 7 & t-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & t+3 \end{bmatrix}$ ，要使方程组有解，则需令 $t+3 = 0$ ，即 $t = -3$ 。故本题选 B。

3. 【答案】A。解析：选项中的级数都是正项级数。对于 A 项，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n}{n^{\frac{1}{n}}} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0$ ，所以 A 项级数一定发散；对于 B 项，因为当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{1}{n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2}$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 B 项级数收敛；对于 C 项，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3$ ，即 C 项级数有界，所以 C 项级数收敛；对于 D 项，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ ，即 D 项级数有界，所以 D 项级数收敛。故本题选 A。

4. 【答案】C。解析：已知 $X \sim B(n, p)$ ，所以 $E(X) = np = 1.6$ ， $D(X) = np(1-p) = 1.28$ ，两式联立解得， $n = 8, p = 0.2$ 。故本题选 C。

5. 【答案】C。解析：计算 $f(x)$ 的一阶导数和二阶导数， $f'(x) = a\cos x + \sin 2x + 2x\cos 2x$ ， $f''(x) = -a\sin x + 4\cos 2x - 4x\sin 2x$ 。因为 $f(x)$ 在 $x_0 = \pi$ 处取得极值，所以 $f'(\pi) = -a + 2\pi = 0$ ，于是 $a = 2\pi$ ，从而 $f''(\pi) = -2\pi\sin\pi + 4\cos 2\pi - 4\pi\sin 2\pi = 4 > 0$ 。因此， $f(x)$ 在 $x_0 = \pi$ 处取得极小值。故本题选 C。

6. 【答案】D。解析：(方法一) 因为 $AB = O$ ，所以 B 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax = O$ 的解，又 B 是非零矩阵，所以齐次线性方程组 $Ax = O$ 一定有非零解，于是 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 1 = 0, a = 1$ 。故本题选 D。

(方法二) 因为 $AB = O$ ，所以有 $r(A) + r(B) \leq 3$ ，又 $B \neq O$ ，所以 $r(B) \geq 1$ ，于是 $r(A) < 3$ ，从而行列式

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ 。故本题选 D。

选 D。

(方法二) 因为 $AB = O$ ，所以有 $r(A) + r(B) \leq 3$ ，又 $B \neq O$ ，所以 $r(B) \geq 1$ ，于是 $r(A) < 3$ ，从而行列式

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = a - 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ 。故本题选 D。

7.【答案】C。解析：《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中在解释“逻辑推理”这一核心素养时指出，逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质。

8.【答案】A。解析：刘徽是中国古典数学理论的奠基者之一，他注有《九章算术注》和《海岛算经》。

二、简答题

9.【参考答案】

设点 $P(x, y, z)$ 是满足条件的点，则由点到平面的距离公式知， $d = \frac{|4x - 2y - 4z - 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = 2$ ，整理得，

点 P 的轨迹方程为 $4x - 2y - 4z - 17 = 0$ 或 $4x - 2y - 4z + 7 = 0$ 。

10.【参考答案】

设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$ 。由于 α_1 ,

α_2, α_3 线性无关，所以 $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$ 解方程组得， $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。因此， $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关。

11.【参考答案】

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d(\arctan x) \\ &= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \left(\frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C_0 \\ &= \left(\frac{1+x^2}{2}\right) \arctan x - \frac{x}{2} + C_0. \end{aligned}$$

12.【参考答案】

在数学教学中，信息技术是学生学习和教师教学的重要辅助手段，为师生交流、生生交流、人机交流搭建了平台，为学习和教学提供了丰富的资源。教师合理地运用信息技术，可以优化课堂教学，转变教学与学习方式，为学生理解概念创设背景，为学生探索规律启发思路，为学生解决问题提供直观表象，引导学生自主获取资源。

教师合理地运用信息技术，使信息技术与数学课程深度融合，可以实现传统教学手段难以达到的效果。例如，利用计算机展示函数图像、几何图形运动变化过程，利用计算机探究算法、进行较大规模的计算，从数据库中获得数据，绘制合适的统计图表；利用计算机的随机模拟结果，帮助学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率。因此，积极开发和有效利用各种课程资源，合理地应用现代信息技术，注重信息技术与课程内容的整合，能有效地改变教学方式，提高课堂教学的效益。

13.【参考答案】

在教学过程中可以设问：直线的方向向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_0, y_0, z_0)$ ，平面的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_1, y_1, z_1)$ ，由此可得到哪些结论？这是一个结论开放的问题，由几何直观可以想象直线和平面可能相交（含垂直）、可能平行、也可能直线在平面内，将这些几何直观猜想用向量来量化计算，这就涉及到向量的数量积计算。通过计算结果怎样判断直线和平面的关系？通过对这个问题的探讨，使学生复习巩固了所学知识，将多种思想联系在一起，充分锻炼了学生思维的多向性、灵活性和创造性。

三、解答题

14.【参考答案】

由题意可知矩阵 C 为 2×2 阶矩阵, 故可设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, 则由 $AC - CA = B$, 即

$$\begin{bmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}, \text{可得线性方程组} \begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b. \end{cases} \quad ①$$

求所有矩阵 C , 即求出方程组 ① 的通解. 对方程组 ① 的增广矩阵进行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{array} \right], \text{由于方程组 ① 有解, 故有 } 1+a=0, b-1-a=0, \text{ 即 } a=-1, b=0, \text{ 从而有}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{故有} \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1, \\ x_2 = -k_1, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = k_2, \end{cases} \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意实数, 从而有}$$

$$C = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}.$$

四、论述题

15.【参考答案】

出现这种现象的原因主要有以下几点: ① 教师提出的问题太难, 超出学生的能力范围; ② 教师提的问题表述不够准确、具体, 学生不知如何回答; ③ 教师用语不当, 学生不愿回答; ④ 学生需要教师预留自己探索、实践、思考的时间和机会, 不急于回答; ⑤ 个别学生想回答, 但是看其他学生没有出声, 也选择沉默。

这种现象是教师在课堂教学中经常会遇到的问题, 想要避免这种问题的出现, 教师应该: ① 在设计问题的时候就站在学生的角度, 切实考虑到他们的认知程度; ② 提出的问题必须是准确、具体、不产生歧义的, 教师要在充分掌握教材和学情后, 花费大量的时间和精力去设计问题; ③ 教师在提问时说话语气和用词要恰当, 要帮助学生建立信心, 调动学生回答问题的积极性; ④ 提问题时要给学生预留时间思考, 必要时可以给学生一些启发; ⑤ 营造活跃的课堂气氛, 使学生积极的参与到课堂活动中, 体会学习的乐趣。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 该生在解题的过程中忽略了讨论二次项的系数为 0 的情况. 造成这种错误的原因可能是: 该学生主观认为方程组解的情况只能利用判别式作答, 忽略了对消元后方程的二次项系数的讨论。

正确解法: 联立方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = k(x+1), \end{cases}$ 消去 y 得 $(1-k^2)x^2 - 2k^2x - (k^2+3) = 0$. 当 $1-k^2=0$, 即 $k=\pm 1$ 时, 此时方程为关于 x 的一元一次方程, 方程组只有一个解, 故直线与双曲线有一个交点; 当 $\Delta = (-2k^2)^2 + 4(1-k^2)(k^2+3) = 0$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, 方程组只有一个解, 故直线与双曲线有一个交点; $1-k^2 \neq 0$,

当 $\begin{cases} \Delta = (-2k^2)^2 + 4(1-k^2)(k^2+3) > 0, \\ 1-k^2 \neq 0, \end{cases}$ 即 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < k < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $k \neq \pm 1$ 时, 方程组有两个解, 故直线与双曲

线有两个交点;当 $\begin{cases} \Delta = (-2k^2)^2 + 4(1-k^2)(k^2+3) < 0, \\ 1-k^2 \neq 0, \end{cases}$ 即 $k > \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k < -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时,方程组无解,故直线与

双曲线没有交点。综上所述,当 $k = \pm 1$ 或 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时,直线与双曲线只有一个交点;当 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < k < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $k \neq$

±1 时,直线与双曲线有两个交点;当 $k > \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k < -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时,直线与双曲线没有交点。

(2) 针对本题,结合案例学生出现的错误,教师应该根据该题的教学步骤,在教学过程中,采取相应的策略设置问题。下面结合教学过程进行分析:

① 教师与学生一起回忆旧知,提出问题“判断直线和双曲线的位置关系的方法有几种,分别是什么?”。

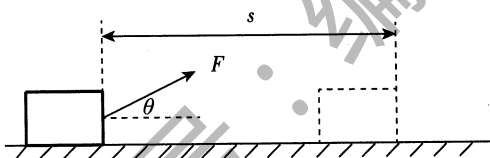
②教师结合本题让学生画出该题相关的图像,设置问题引导学生全面考虑直线与双曲线交点个数的情况,如“有一个交点的时候怎么判断?对应的函数图像是什么样的?”

③教师结合本题引导学生分类讨论一元二次方程判别式与根的个数的关系,可设置问题如“判别式大于0时,有几个根?等于0时,有几个根?小于0时呢?”

六、教学设计题

17. 【参考答案】

(1) 如下图所示:在水平地面上有一个木块,一个力 F 作用在木块上,将木块向右拉动了 s 的距离,则力 F 在这期间做的功是多少?



(2) 教学过程

一、复习导入

提问 1: 向量的线性运算都包括哪些运算?

提问 2: 向量的线性运算的结果有什么特点?

让学生思考这两个问题,并举手回答,教师对学生的答案给予一定评价并带领学生一起回顾向量线性运算的知识。

二、探索新知

教师向学生引述物理学中做功的例子,并提问。

问题 1: 如果一个物体在力 F 的作用下产生位移 s , 那么力 F 所做的功为多少? (出示如(1)中的示意图)

学生思考后作答,教师板书: $W = |F||s|\cos\theta$ 。

问题 2: 这个公式有什么特点? 完成下列填空。

① W (功) 是 量;

② F (力)是_____量;

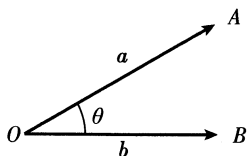
③ s (位移)是_____量;

④ θ 是_____。

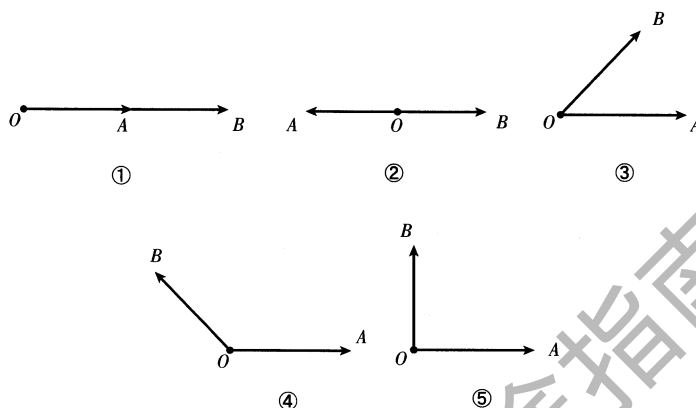
教师巡视学生作答情况,对于作答有困难的学生给予一定的提示,随后,教师板书答案,并让学生将力 F 和位移 s 类比为向量,并提问。

问题3:当把力 F 和位移 s 类比为向量时,力方向与位移方向的夹角 θ 代表什么呢?

学生在小组内自由地交流自己的想法,小组讨论结束后,教师直接给出向量夹角的定义:已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, O 是平面上的任意一点,作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 叫作 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。(出示图片)



问题4:向量之间夹角的大小有什么具体意义?观察下面几幅图,说出向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角是多少?此时两向量有怎样的关系?



教师让学生分组讨论,然后每组各派一个学生回答问题。教师总结学生的答案后板书:

当 $\theta = 0$ 时, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 同向;

当 $\theta = \pi$ 时, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 反向;

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 垂直,记作 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 。

(板书过程中,可适时引导学生说出夹角 θ 的取值范围)

问题5:当把力 F 和位移 s 类比为向量时,力 F 所做的功 W 代表什么呢?

教师让学生先思考,然后随机叫学生起来回答问题(由于学生课前有预习任务,预测学生回答数量积)。

教师顺势给出数量积的定义:已知两个非零向量 a 与 b ,它们的夹角为 θ ,我们把 $|a||b|\cos\theta$ 叫作向量 a 与 b 的数量积(或内积),记作 $a \cdot b$,即 $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ 。并规定零向量与任一向量的数量积为0。(板书)

教师让学生自己看几遍数量积的定义,然后提问:数量积运算的结果是数量还是向量?

教师引导学生利用前面的力做功的例子来分析,因为功 W 是标量,所以猜测数量积是数量而不是向量。

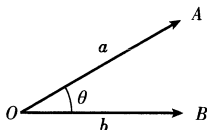
教师对学生的猜测作肯定评价,并在黑板上板书这个注意点,即数量积的结果是一个数量而非一个向量。

问题6:向量的数量积是一个数量,那么它什么时候为正,什么时候为负呢?

教师提示学生可以从向量数量积的定义中去得到答案,留5分钟给学生独立思考,之后让学生自己举手回答得出的结论,教师给予积极评价,并顺势板书:

向量 a 与 b 的数量积 $a \cdot b$ 的正负由它们的夹角确定,当 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 时, $a \cdot b$ 为正;当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, $a \cdot b$ 为负;当 $\theta = 90^\circ$ 时, $a \cdot b$ 为零。

问题7:两个非零向量 a, b , b 在 a 方向上的投影是什么?你能在图上作出 b 在 a 方向上的投影吗?



学生小组讨论,并自己在白纸上画一画投影,教师巡视并作相应的引导(如询问学生投影是什么,怎么作投影,余弦函数的概念等),在教师引导下,学生能够理解 b 在 a 方向上的投影是一个标量,它的大小为

$|b|\cos\theta$ 。教师解释向量数量积的几何意义,并板书:数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b|\cos\theta$ 的乘积。

三、练习巩固

① 已知 $|a| = 8$, $|b| = 4$, a 与 b 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$, 求 $a \cdot b$ 。

② 已知 $a \cdot b = 5$, $|a| \cdot |b| = 10$, 求 a 与 b 的夹角。

四、课堂小结

① 本节课你学到了什么?

② 思考平面向量数量积可以用来解决什么问题?

(3) ① 已知 $|a| = 4$, $|b| = 3$, $a \cdot b = -6\sqrt{2}$, 求 a 与 b 的夹角 θ 。

② 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$, 则 $\triangle ABC$ 是什么三角形? 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ 呢? 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$ 呢?

公众号：蛋卷资料屋
编途指南

教师资格考试数学学科知识与教学能力(高级中学)

标准预测试卷(五) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析：根据变限积分求导公式， $F'(x) = f(\arctan x)(\arctan x)' - f(a^x)(a^x)' = \frac{1}{1+x^2}f(\arctan x) - a^x \ln a f(a^x)$ 。故本题选 B。

2. 【答案】A。解析：令 $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$ ，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$ ，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n$ 的收敛半径为 2。当 $x = 2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (调和级数)，此时级数发散；当 $x = -2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ，此时由莱布尼茨判别法知，级数收敛。因此， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} x^n$ 的收敛域为 $[-2, 2)$ 。故本题选 A。

3. 【答案】B。解析：分别计算矩阵 A 和矩阵 B 的特征值可得，A 的特征值为 1(二重)，-1；B 的特征值为 3(二重)，-1。由于 A 与 B 的特征值不同，所以 A 与 B 不相似，但由 A、B 的特征值可知，(同阶矩阵) A 与 B 的秩和正、负惯性指数相等，所以 A 与 B 合同。故本题选 B。

4. 【答案】A。解析：坐标平面 yOz 内的一条直线，①如果平行于 z 轴，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是圆柱面；②如果与 z 轴相交但不垂直，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是圆锥面；③如果与 z 轴垂直，则直线绕 z 轴旋转一周得到的图形是平面。故本题选 A。

5. 【答案】C。解析：已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，所以 $E(X) = \mu$ ，于是 $E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2\mu + 1 = 5$ ，解得 $\mu = 2$ 。故本题选 C。

6. 【答案】D。解析：因为 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$ ， $g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$ ，所以 $(f(x), g(x)) = (x+1)$ 。故本题选 D。

7. 【答案】A。解析：“道而弗牵，强而弗抑，开而弗达”意为教师要引导学生，但决不牵着学生的鼻子；要严格要求学生，但决不使学生感到压抑；要启发学生思考问题，但决不直接把答案告诉学生。教师的作用在于引导、激励、启发，而不是牵着学生走，强迫和代替学生学习。启发式原则(启发性原则)是指在教学中教师要主动承认学生是学习的主体，注意调动他们的学习主动性，引导他们独立思考、积极探索、生动活泼地学习，使学生自觉地掌握科学知识从而提高分析问题、解决问题的能力。因材施教原则是指教师在教学中，既要按课程计划、学科课程标准的统一要求出发，面向全体学生，又要根据学生的个别差异，有的放矢地进行教学，使每个学生都能扬长避短获得最佳的发展。循序渐进原则是指教师要严格按照科学知识的内在逻辑体系和学生认识能力发展的顺序进行教学，使学生系统地掌握基础知识和基本技能，培养学生的逻辑思维能力。巩固性原则是指教师在教学中，使学生在理解的基础上牢固地掌握知识和基本技能，并长久地保持在记忆中，在需要的时候能够准确无误地呈现出来，以利于学生运用知识技能。

8. 【答案】B。解析：《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中明确指出，数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。

二、简答题

9. 【参考答案】

令 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$ ，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，同时 $F(a) = 0, F(b) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}$ ， $F'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}$ 。因此，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $F(b) -$

$$F(a) = F'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

10.【参考答案】

(方法一)

设所求直线为 l , 由题意可知, 与平面 $3x - 4y + z - 8 = 0$ 平行的平面束方程为 $3x - 4y + z + k = 0$, 又直线 l 过点 $(1, 0, 4)$, 代入求得 $k = -7$, 即直线 l 在平面 $3x - 4y + z - 7 = 0$ 上。联立方程
$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 7 = 0, \\ x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}, \end{cases}$$
 可求

得直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 与直线 l 的交点为 $(21, 25, 44)$, 因为直线 l 还经过点 $(1, 0, 4)$, 所以直线 l 的方向向量

$$l = (4, 5, 8), \text{ 因此所求直线的方程为 } \frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-4}{8}.$$

(方法二)

设过点 $(1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z - 8 = 0$ 平行的平面为 π_1 , 所求直线 l 在 π_1 内, 根据平行平面的关系易得, π_1 的一般方程为 $3x - 4y + z - 7 = 0$ 。

直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 过点 $(-1, 3, 0)$, 且一个方向向量为 $s = (1, 1, 2)$, 又平面 π_1 的一个法向量为 $n = (3, -4, 1)$, 因为 $sn \neq 0$, 所以直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 与 π_1 相交, 所以直线 l 与直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 所确定的平面 π_2 与 π_1 相交, 相交直线即为 l 。

平面 π_2 过点 $(-1, 3, 0)$ 和点 $(1, 0, 4)$, 且与向量 $s = (1, 1, 2)$ 平行, 设 π_2 上任意一点的坐标为 (x, y, z) , 则向量 $u = (x + 1, y - 3, z)$ 和向量 $v = (2, -3, 4)$ 都平行于平面 π_2 , 即向量 s, u, v 共面, 即有 $(s, u, v) =$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2x - z + 2 = 0, \text{ 所以 } \pi_2 \text{ 的一般方程为 } 2x - z + 2 = 0.$$

因此, 所求直线 l 的一般方程为
$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 7 = 0, \\ 2x - z + 2 = 0. \end{cases}$$

11.【参考答案】

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0, \text{ 实对称矩阵 } A \text{ 的特征值为 } -1 \text{ (二重)},$$

5. 当 $\lambda = -1$ 时, $(-E - A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可得实对称矩阵的特征值 -1 对应的特征向

量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$; 当 $\lambda = 5$ 时, $(5E - A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可得

实对称矩阵的特征值 5 对应的特征向量为 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 。

施密特正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}(-1, -1, 2)^T$, 又 $\alpha_3^T \beta_1 = 0,$

$\alpha_3^T \beta_2 = 0$, 所以 $\beta_3 = \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 。单位化, $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, -1, 2)^T,$

$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)^T$ 。实对称矩阵 A 经正交变换 $Q^T A Q$ 可以得到对应的对角矩阵为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 其

$$\text{中 } Q = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

12.【参考答案】

教学中教师可以从以下三个方面培养学生发现与提出问题的能力：

一是创设情境，营造发现和提出问题的氛围。通过创设问题情境，让学生生疑，诱发学生的问题意识，同时让学生感到问题无处不在，培养学生问题意识的习惯，学会用数学的眼光观察现象，用数学的思维分析问题。

二是放慢节奏，留下发现问题和提出问题的时间。教师应改变观念，转化角色，在教学中营造一个宽松和谐的教学氛围，建立平等的师生关系，消除学生的畏惧心理，鼓励学生大胆质疑，提出问题，同时要设法保护学生发问的积极性。

三是抓住机会，指导发现和提出问题的方法。在教学中，不但要让学生在一定的情境中，发现问题、提出问题，而且还要引领组织学生经历探求解决问题的方法的过程，这是培养学生解决问题能力的重要途径。

13.【参考答案】

好的教学活动，应是学生主体地位和教师主导作用的和谐统一。一方面，学生主体地位的真正落实，依赖教师主导作用的有效发挥；另一方面，有效发挥教师主导作用的标志是学生能够真正成为学习的主体，得到全面的发展。

启发式教学是处理好学生主体地位和教师主导作用的有效途径。教师富有启发性的讲授，创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流，组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，都能有效地启发学生的思考，使学生成为学习的主体。

三、解答题

14.【参考答案】

由于矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$ ，所以二阶矩阵 A 具有两个不相等的特征值 -2 和 1 ，从而 A 可对角化。求出线性方程组 $(E - A)x = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，即矩阵 A 的属于特征值 1 的一个特征向量；求出线性方程组 $(-2E - A)x = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，即矩阵 A 的属于特征值 -2 的一个特征向量。令 $T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 教学活动要与实际问题情境相结合，积极营造良好的教学氛围。学生乐于学习是确保教学有效性的重要因素，也是教学是否成功的一个重要标志。例如，利用解三角形的相关知识测量建筑物的高度或建筑物上广告牌的长度等。

(2) 数学教学方法要在“生活问题数学化”中创新，这样数学教学才能更形象。例如，学习函数时，可以让学生计算自己家里的阶梯电费，或建立父母的移动电话的套餐和每个月话费的函数关系等。

(3) 教学活动要积极引导学生主动投入学习并进行研究性活动。这样学生在情境的激励下和问题的互动中才能真正地理解教师所授的知识。

(4) 教学过程要重视现代化教学技术在课堂教学中的应用，使数学教学通过现代化手段，变静态为动态，变抽象为直观，变复杂为简单。

(5) 重视学生课后学习方向的科学指导。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 案例中例题的正确解法如下。

二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^{2n}$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{2n}^r \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{2n-r} (-\sqrt{x})^r = C_{2n}^r (-1)^r 2^{2n-r} x^{n-r}$, 展开式的第五项即 $r = 4$, 进一步根据题意知, $4 - n = 0$, 解得 $n = 4$, 即 $T_{r+1} = C_8^r (-1)^r 2^{8-r} x^{r-4}$ 。可知一次项 x 对应的 r 值为 5, 进而可求得 x 项的二项式系数为 $C_8^5 = 56$ 。

(2) 学生小赵解法中的问题:

① 二项展开式的通项存在错误;

② 根据题意 r 的取值错误。

产生错误的原因: 对二项展开式的通项不理解, 导致对公式的记忆存在偏差。

学生小宋解法中的问题:

① 虽然小宋的通项结果与正解相同, 但题目二项式是 $2n$ 个 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ 相乘, 其解题过程中的 n 与题目中的 n 不是同一个变量;

② 二项式系数求错。

产生错误的原因: 审题不清, 对二项展开式通项公式的记忆过于死板, 某一项的系数与某一项的二项式系数两种概念混淆不清。

(3) 在教学“二项式定理”时应该注意以下几点:

① 在教学二项式定理、二项展开式的通项公式的概念时, 要使学生明确二项式系数以及公式中 r 和 n 的含义;

② 针对二项展开式的通项公式, 教师要明确 $(a+b)^n = C_n^r a^{n-r} b^r$ 中的 a 是降幂排列, b 是升幂排列, 帮助学生理解记忆;

③ 教师要明确二项展开式的某一项的系数与某一项的二项式系数的区别;

④ 教师在教学这部分内容时要结合专项习题进行讲解, 使学生更进一步地明确并记忆二项式定理的潜在知识点。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学目标:

① 通过直观感知和操作确认, 归纳出“平面与平面平行的判定定理”, 培养类比及转化的思想, 培养合情推理能力;

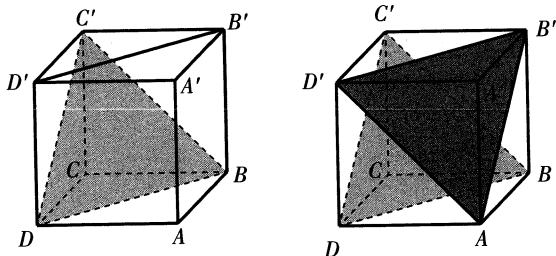
② 理解“平面与平面平行的判定定理”, 并能准确使用数学符号语言、文字语言、图形语言表述该定理;

③ 能用“平面与平面平行的判定定理”证明一些简单的空间几何问题, 培养和发展几何直观, 体会空间几何之美。

教学重点: 平面与平面平行的判定定理及应用。

(2) 教师: 上节课我们学习了直线与平面平行的判定, 你能用学过的知识解决下面这个问题吗?

如图, 在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 证明: $B'D' \parallel$ 平面 $C'BD$ 。



请一位学生上黑板板演,其他学生在自己的座位上独立完成解答,完成后师生共同点评板演学生的证明过程,并一起回顾直线与平面平行的判定定理。

教师顺势提出思考问题:如果连接 AD' , AB' ,构成一个新的平面 $AD'B'$,那么如何证明平面 $AD'B' \parallel$ 平面 BDC' 呢?

【设计意图】通过一道例题,即帮助学生复习了直线与平面平行的判定定理,也为新课平面与平面平行的判定定理的教学展开作好铺垫,同时通过探索性问题的设置,有效激发了学生学习新课的积极性,有利于提高教学效果。

(3) 探究活动

① 带领学生复习平面与平面平行的定义:两个平面没有公共点则两平面平行。

指出:两个平面没有公共点则两平面平行,即一个平面内的所有直线与另一个平面都没有交点。结合前面所学的直线与平面平行的定义,可知一个平面内所有直线都平行于另一个平面则两平面平行。

② 提出问题,引导学生自主探究新知。

问题1:平面内有无数条直线,怎么简便地判定两平面平行呢?(从直线最少的情况开始,先探究平面内有一条直线与另一个平面平行的情况)

活动1:让学生拿出三角板,使三角板的一条边所在直线与桌面平行,观察三角板所在平面是否与桌面平行。

引导发现:保持三角板一条边不动,旋转三角板可以使两平面不平行,所以一条直线的情况不行。

问题2:一条直线的情况不行,两条直线呢?

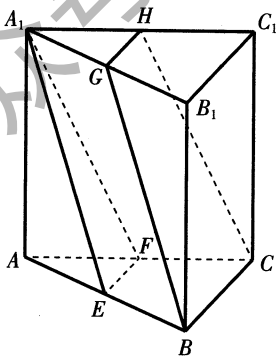
活动2:教师先带领学生分析平面内两条直线可能存在的情况(两直线相交或两直线平行),让学生对两种情况分别进行操作,探究两平面是否平行。

引导发现:两条相交直线都平行于另一个平面时两平面平行。

③ 新知讲授

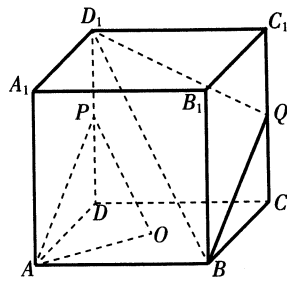
板书平面与平面平行的判定定理:一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,则这两个平面平行。

(4)① 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E,F,G,H 分别是 AB,AC,A_1B_1,A_1C_1 的中点,求证:平面 $EFA_1 \parallel$ 平面 $BCHG$ 。



【设计意图】巩固定理,运用定理,培养学生的识图能力与逻辑推理能力,在做题中体会面面平行 $\rightarrow$ 线面平行 $\rightarrow$ 线线平行的转化思想。

② 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为底面 $ABCD$ 的中心, P 是 DD_1 的中点,设 Q 是 CC_1 上的点,问:当点 Q 在什么位置时,平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO ?



【设计意图】采用反问的方式,培养学生逆向思维的同时深化学生对平面与平面平行的判定定理的理解,从而达到让学生巩固所学定理的目的。

公众号：编途指南

公众号：编途指南

公众号：编途指南

公众号：编途指南